Diskrete Mathematik

Lösung 9

9.1 Brücken und Kreise

a) Sei $G = (V, E)$ nicht kreislos, und sei $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$ ein beliebiger Kreis von G. Jede Kante $\{v_i, v_{i+1}\}$ (für $i \in \{0, \ldots, k-1\}$) auf diesem Kreis ist *keine* Brücke: Falls es einen Pfad von u nach v gibt (für beliebige Knoten $u, v \in V$), der die Kante $\{v_i, v_{i+1}\}$ enthält, dann kann man einen Weg von u nach v konstruieren, indem die Kante $\{v_i, v_{i+1}\}$ durch den Pfad $v_i, v_{i-1}, \ldots, v_0, v_{k-1}, \ldots, v_{i+1}$ (bzw. den Pfad $v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}, v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i$) ersetzt wird. Folglich gibt es auch einen Pfad von u nach v, der die Kante $\{v_i, v_{i+1}\}$ nicht verwendet. Aus diesem Grund erhöht sich die Anzahl Komponenten nicht, wenn man die Kante $\{v_i, v_{i+1}\}$ entfernt.

Um die Gegenrichtung zu beweisen, nehme an G habe eine Kante $\{u, v\} \in E$, die keine Brücke ist. Entfernt man diese Kante, bekommen wir den Graphen $G' = (V, E' \setminus \{u, v\})$, und wir wissen, dass ein Pfad $u = v_0, \ldots, v_k = v$ von u nach v in G' existiert (sonst wäre $\{u, v\}$ eine Brücke). Fügen wir die Kante $\{u, v\}$ zum Pfad hinzu, bekommen wir einen Kreis $v, u, v_1, \ldots, v_{k-1}, v$ in G, der aus diesem Grund nicht kreislos ist.

b) Sei $G = (V, E)$ ein Wald. Existieren $v, w \in V$ so dass $\{v, w\} \notin E$ und $G' = (V, E \cup \{\{v, w\}\})$ kreislos ist, dann müssen v und w in zwei verschiedenen Zusammenhangskomponenten sein, da sonst ein Kreis entstehen würde. Deswegen ist G nicht zusammenhängend, und kein Baum.

Für die Gegenrichtung, ist G ein Wald, aber kein Baum, dann hat G mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Nimmt man beliebige $v, w \in V$ so dass v und w in zwei verschiedene Zusammenhangskomponente liegen, dann kann durch Einfügen der Kante $\{v, w\}$ kein Kreis entstehen.

9.2 Baum?

Die Aussage ist falsch. Die Bedingung wird zwar von jedem Baum mit $|V| \geq 2$ erfüllt, reicht aber im allgemeinen nicht, um einen Baum zu charakterisieren. Der Graph $G = (V, E)$ in Abbildung 1 hat zwei Zussammenhangskomponenten und einen Kreis, und ist deswegen kein Baum, erfüllt aber die Bedingung, weil $|V| = 5$ und $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 8 = 2 \cdot (5 - 1)$.

9.3 Blätter

Wir betrachten $W = G - v$, also den Graphen G ohne den Knoten v (und ohne die k Kanten aus G inzident zu v).

Der Graph W ist ein Wald bestehend aus k Bäumen, $B_1, \ldots, B_k$. Für jeden der Bäume B_i bezeichnen wir dessen Blätter mit $b_{i,1}, \ldots, b_{i,l_i}$. Desweiteren bezeichnen wir den einzigen Knoten in B_i der zu v verbunden ist mit v_i.

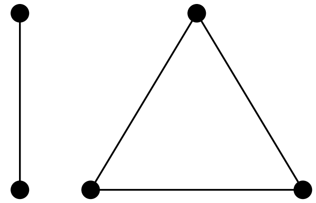

Abbildung 1: Gegenbeispiel für Aufgabe 9.2

Besitzt B_i mindestens zwei Knoten, so sind alle Blätter $\{b_{i,1}, \ldots, b_{i,l}\} \setminus \{v_i\}$ in B_i ebenfalls Blätter in G. Gemäss der Vorlesung besitzt jeder Baum mit mindestens zwei Knoten ebenfalls mindestens zwei Blätter und somit gibt es in B_i ein Blatt, das ebenfalls eines in G ist. Falls B_i nur aus dem Knoten v_i besteht, so ist v_i auch ein Blatt in G. Deshalb besitzt G mindestens ein Blatt in jedem seiner Teilbäume $B_i, i \in \{1, \ldots, k\}$ und insgesamt mindestens k Blätter.

9.4 Baum und Knotengrade

Beweisen wir zuerst, dass die Formel für jeden Baum gilt: Für jeden Baum gilt $2n - 2 = 2 \cdot (|V| - 1) = 2 \cdot |E| = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

Umgekehrt, zeigen wir dass wir, falls die Formel erfüllt ist, auch einen dazu passenden Baum konstruieren können: Wir bezeichnen eine Sequenz natürlicher Zahlen $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n \geq 1$ als Baum-Sequenz, falls $\sum_{i=1}^{n} k_i = 2n - 2$ gilt. Für jede Baum-Sequenz muss $k_n = 1$ sein. Angenommen dies ist nicht der Fall, dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, $k_i \geq 2$ und $\sum_{i=1}^{n} k_i \geq 2n$, ein Widerspruch.

Wir zeigen nun mittels Induktion die Existenz eines Baumes B_n mit n Knoten, so dass für jeden Knoten v_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, dass $deg(v_j) = k_j$.

Die Aussage gilt trivialerweise für $n = 1$, da es keine Baum-Sequenz k_1 gibt, so dass $k_1 \geq 1$ und ebenfalls $\sum_{i=1}^{1} k_i = k_1 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$.

Beweisen wir die Aussage nun für Baum-Sequenzen bestehend aus $n + 1$ Zahlen, $k_1, \ldots, k_{n+1}$, unter der Induktionsannahme, dass die Aussage für alle Baumsequenzen bestehend aus n Zahlen gilt.

Hierfür betrachten wir die neue Zahlensequenz $k_1 - 1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}, k_n$, die wiederum eine Baum-Sequenz ist, da $k_{n+1} = 1$. Wir können also einen Baum B_n wählen mit $deg(v_1) = k_1 - 1$ und $deg(v_i) = k_i$, $i \in \{2, \ldots, n\}$. Im letzten Schritt fügen wir einen Knoten v_{n+1} zu B_n hinzu, der nur mit v_1 verbunden ist, und bezeichnen diesen neuen Baum mit B_{n+1}. Natürlich gilt nun für B_{n+1}, dass $deg(v_i) = k_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

9.5 Jasser und Brücke

Auf den ersten Blick scheint die Lösung darin zu bestehen, dass der schnellste Läufer mit der Taschenlampe oszilliert und einen nach dem andern über die Brücke begleitet. Dies dauert

$$2 + 1 + 10 + 1 + 12 = 26 \text{ min.}$$

Eine bessere (die optimale) Lösung erhält man aber, wenn die beiden langsamen zusammen gehen. Also zuerst 1 und 2 zusammen, dann 1 zurück, dann 10 und 12 zusammen, 2 zurück, schliesslich 1 und 2 zusammen; dies dauert

$$2 + 1 + 12 + 2 + 2 = 19 \text{ min.}$$