 Prof. Stefan Wolf

Diskrete Mathematik

Lösung 8

8.1 Vorstand und Präsident

Sei M eine n-elementige Menge. Aus dieser Menge M wollen wir (i) einen *Vorstand unbestimmter Grösse* und (ii) einen *Präsidenten des Vorstands* wählen.

Wir könnten zuerst (i) und dann (ii) aus M wählen. Nehmen wir an, der Vorstand habe Grösse $k \in \{1, \ldots, n\}$, dann gibt es $\binom{n}{k}$ viele Möglichkeiten diesen Vorstand aus M zu wählen. Weiter gibt es k Möglichkeiten, nun den Präsidenten aus den Reihen des Vorstands zu wählen. Zusammen:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Würden wir aber zuerst (ii) und dann (i) (die verbleibenden Mitglieder des Vorstands) wählen, dann ergäben sich für die Wahl des Präsidenten p insgesamt n Möglichkeiten. Die verbleibenden Mitglieder des Vorstandes werden nun aus der Menge $M \setminus \{p\}$ gewählt. Da die Grösse des Vorstandes nicht festgelegt ist, gibt es hierzu 2^{n-1} Möglichkeiten: Jedes der Mitglieder ist dabei oder nicht. Also zusammen:

$$n2^{n-1}.$$

Wir haben nun die Anzahl Möglichkeiten für (i) und (ii) auf zwei verschiedene Arten gezählt:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

8.2 Permutationen

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Für eine Permutation π und ihr Inverses π^{-1} gilt:

$$\pi \circ \pi^{-1} = \mathbf{1}.$$

Setzen wir nun für π die Permutation aus der Aufgabenstellung ein.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Daraus folgt nun, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1243)(5)$$

und

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1345)(2).
\end{aligned}$$

Die Permutationen $(1243)(5)$ und $(1345)(2)$ besitzen die gleiche Zyklenstruktur, nämlich $(1, 4)$. Dies gilt allgmein für eine Permutation π und deren "Konjugation" $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}$ mit einer zweiten Permutation σ.

d) Sei π eine Permutation auf n Elementen mit k_i Zyklen der Länge i, $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir schreiben für die Zyklenstruktur von π: $(1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, n^{k_n})$. Damit ist gemeint, dass in der Klammer zuerst k_1 Einträge 1 stehen, dann genau k_2 Einträge 2, etc. Es gilt dann $\sum_{i=1}^{n} i \cdot k_i = n$. Z.B. gilt für die Permutation $(1243)(5)$ und deren Zyklenstruktur $(1, 4)$, dass $1 + 4 = 5$, wie behauptet.

Die Anzahl der Zyklenstrukturen einer Permutation π mit genau k Zyklen ist deshalb gleich der Anzahl Möglichkeiten, die Zahl n als ungeordnete Zahlpartition von k positiven Summanden darzustellen. Diese Grösse wurde in der Vorlesung als $P_{n,k}$ definiert, wobei gilt

$$P_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \text{ und } k = 1 \\ 0, & \text{falls } n < k \\ \sum_{i=1}^{k} P_{n-k,i}, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Wir erhalten somit für $n \leq 10$ und $k \leq 10$ folgende Werte:

0	1	0	0	0	0					
1	1	0	0	0	0					
2	1	1	0	0	0	0				
3	1	1	1	0	0	0				
4	1	2	1	1	0	0	0			
5	1	2	2	1	1	0	0			
6	1	3	3	2	1	1	0	0		
7	1	3	4	3	2	1	1	0		
8	1	4	5	5	3	2	1	1	0	
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1	
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

Interessiert sind wir an $\sum_{j=1}^{10} P_{10,j} = 42$.

e) Sei nun eine Zyklenstruktur von n-elementigen Permutationen gegeben, $(1^{k_1}, \ldots, n^{k_n})$. Wir betrachten zuerst ein Beispiel, nämlich die Zyklenstruktur $(1, 2, 2, 5)$ (weiter gilt $n = 10$). Wir betrachten also alle Permutationen mit Zyklendarstellung der Art

$$(\cdot)(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot).$$

Es gibt $10!$ Möglichkeiten, die 10 Elemente $1, \ldots, 10$ auf die 10 Punkte "$\cdot$" zu verteilen. Da die Zyklenschreibweise aber nicht eindeutig ist, werden die Permutationen vielfach gezählt:

(i) Zyklen gleicher Länge können vertauscht werden, ohne die dargestellte Permutation zu ändern. Z.B. sind $(1)(2)(3)$, $(1)(3)(2)$, $(2)(1)(3)$, $(2)(3)(1)$, $(3)(1)(2)$ und $(3)(2)(1)$, $3! = 6$ verschiedene Darstellungen derselben Permutation.

(ii) Für Zyklen der Länge k gibt es k Möglichkeiten der Darstellung: So ist (1543), (5431), (4315) und (3154) derselbe Zyklus der Länge 4.

Zusammen erhalten wir damit

$$\frac{10!}{(k_1! \cdot k_2! \cdot k_5!) \cdot (1^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdot 5^{k_5})} = \frac{10!}{(1! \cdot 2! \cdot 1!) \cdot (1^1 \cdot 2^2 \cdot 5^1)} = \frac{10!}{4 \cdot 20} = 45360$$

verschiedene Permutationen auf 10 Elementen mit der Zyklenstruktur $(1, 2, 2, 5)$.

Allgemein: Seien $k_1, \ldots, k_n \geq 0$ gegeben mit $\sum_{i=1}^{n} i \cdot k_i = n$. Dann gilt für die Anzahl Permutationen auf n Elementen mit Zyklenstruktur $(1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots, n^{k_n})$:

$$\frac{n!}{(k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!) \cdot (1^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdot \ldots \cdot n^{k_n})} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} k_i! \cdot i^{k_i}}\ .$$

8.3 Rekursionen

a) Das *charakteristische Polynom* lässt sich als

$$1 - 3x + 2x^2 = (1 - 2x)(1 - x),$$

faktorisieren, und die geschlossene Formel für a_n hat deswegen die Form $a_n = C_1 2^n + C_2 1^n = C_1 2^n + C_2$. Die Konstanten C_1 und C_2 bestimmen wir mit Hilfe der Anfangsbedingungen, indem wir folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 4 = a_0 \\ 2C_1 + C_2 &= 6 = a_1. \end{aligned}$$

Da $C_1 = C_2 = 2$ die (eindeutige) Lösung ist, ist die geschlossene Formel

$$a_n = 2^{n+1} + 2.$$

b) Die Faktorisierung des charakteristischen Polynoms ist

$$1 - 2x + 1x^2 = (1 - x)(1 - x).$$

In diesem Fall hat die geschlossene Formel für b_n die Form $b_n = C_1 n + C_2$ für geeignete Konstanten C_1 und C_2. Wegen der Anfangsbedingungen wissen wir, dass

$$\begin{aligned} 0C_1 + C_2 &= 1 = b_0 \\ C_1 + C_2 &= 3 = b_1. \end{aligned}$$

Also $C_1 = 2$ und $C_2 = 1$, und die geschlossene Formel lautet

$$b_n = 2n + 1.$$

8.4 Cantormenge

Wird die Cantormenge um den Faktor 3 vergrössert, dann erhalten wir genau 2 Mal die ursprüngliche Menge. Ein Objekt mit dieser Eigenschaft muss die Dimension

$$\log 2/\log 3 \approx 0.631$$

haben.