Diskrete Mathematik

Lösung 7

7.1 Binomialkoeffizienten

a) Wir betrachten eine $2n$-elementige Menge M und partitionieren diese in zwei gleich grosse Teile M_1 und M_2. Auf wie viele Arten können wir zwei Elemente aus M ziehen? Wir können (i) zwei Elemente aus M_1, (ii) zwei Elemente aus M_2 oder (iii) je ein Element aus M_1 und M_2 ziehen.

Wir erhalten also
$$\binom{2n}{2} = \underbrace{\binom{n}{2}}_{(i)} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{(ii)} + \underbrace{n^2}_{(iii)}.$$

b) Wir betrachten wiederum die Mengen M, M_1 und M_2, wollen aber diesmal n Elemente aus M ziehen. Wir ziehen entweder *kein* Element aus M_1 und n aus M_2, oder eins aus M_1 und $n-1$ aus M_2, usw.; allgemein: k aus M_1 und $n-k$ aus M_2, für $k = 0, 1, \ldots, n$.

Diese Überlegung ergibt
$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.\end{aligned}$$

Dies ist ein Spezialfall der Vandermonde-Gleichung aus der Vorlesung.

7.2 Glühbirnen

In den beiden ersten Teilaufgaben benötigen wir die *Binomische Formel*, d.h.
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
für beliebige reelle Zahlen $x, y \in \mathbf{R}$ und alle $n \in \mathbf{N}$.

a) Durch Einsetzen von $x = y = 1$ in die binomische Formel bekommen wir $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

b) Mit $x = -1$ und $y = 1$ bekommen wir $0 = ((-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Man kann jeder der n Glühbirnen einen Wert in $\{\texttt{defekt}, \texttt{funktionierend}\}$ zuweisen, und es gibt $\binom{n}{k}$ Zuweisungen, in denen genau k Glühbirnen defekt sind. Wir wissen, dass $\sum_{0 \leq k \leq n,\ k \text{ gerade}} \binom{n}{k} = \sum_{0 \leq k \leq n,\ k \text{ ungerade}} \binom{n}{k}$. Aus **a)** bekommen wir

$$2^n = \sum_{0 \leq k \leq n,\ k \text{ gerade}} \binom{n}{k} + \sum_{0 \leq k \leq n,\ k \text{ ungerade}} \binom{n}{k} = 2 \sum_{0 \leq k \leq n,\ k \text{ gerade}} \binom{n}{k}.$$

D.h. für genau die Hälfte aller möglichen Zuweisungen sind eine gerade Anzahl von Glühbirnen defekt. Die Behauptung folgt, da jede Zuweisung gleich wahrscheinlich ist.

c) Wir zeigen hier, dass für beliebige endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, |I|=k} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Sei $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ beliebig. Das Element x wird genau einmal auf der linken Seite der Gleichung gezählt, und wir zeigen, dass das auch auf der rechten Seite gilt. Wir bezeichnen (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) als $A_1, \ldots, A_j$ diejenige Mengen, die x enthalten. (Bermerke, dass $j \in \{1, \ldots, n\}$.) Für ein $k \in \{1, \ldots, j\}$ wird x in der Summe $\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, |I|=k} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$ genau $\binom{j}{k}$-mal gezählt, nämlich genau einmal für jede k-elementige Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, j\}$. Insgesamt also

$$\sum_{k=1}^{j} (-1)^{k-1} \binom{j}{k}$$

mal. Dies ist (-1) mal die alternierende Summe einer Zeile (der $j$ten) des Pascal-Dreiecks, ausser dass in der Summe ein Sumamnd 1 fehlt ($k = 0$). Der Ausdruck ist also gleich 1.

7.3 Inklusion/Exklusion

a) Bezeichne die Menge der Zahlen von 1 bis 300 die durch 4 (6, 15) teilbar sind mit T_4 (T_6, T_{15}). Durch Inklusion/Exklusion haben wir

$$|T_4 \cup T_6 \cup T_{15}| = |T_4| + |T_6| + |T_{15}| - |T_4 \cap T_6| - |T_4 \cap T_{15}| - |T_6 \cap T_{15}| + |T_4 \cap T_6 \cap T_{15}|.$$

Die Anzahl Elemente in T_4 können wir jetzt einfach ausrechnen, indem wir 300 durch 4 teilen und das Resultat auf die nächstkleinere Ganzzahl abrunden:

$$\begin{aligned}
|T_4| &= \lfloor 300/4 \rfloor = 75 \\
|T_6| &= \lfloor 300/6 \rfloor = 50 \\
|T_{15}| &= \lfloor 300/15 \rfloor = 20 \\
|T_4 \cap T_6| &= \lfloor 300/kgV(4,6) \rfloor = \lfloor 300/12 \rfloor = 25 \\
|T_4 \cap T_{15}| &= \lfloor 300/(4 \cdot 15) \rfloor = 5 \\
|T_6 \cap T_{15}| &= \lfloor 300/kgV(6,15) \rfloor = \lfloor 300/30 \rfloor = 10 \\
|T_4 \cap T_6 \cap T_{15}| &= \lfloor 300/kgV(4,6,15) \rfloor = \lfloor 300/60 \rfloor = 5
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$|T_4 \cup T_6 \cup T_{15}| = 75 + 50 + 20 - 25 - 5 - 10 + 5 = 110$$

b) Beschreiben wir mit der Menge A alle Einwohner des Dorfes, die im Verein A sind und mit $\bar{A}$ alle Einwohner des Dorfes die nicht im Verein A sind. Die Anzahl Einwohner des Dorfes ist die Anzahl Leute, die in einem Verein sind und die Anzahl Leute die in keinem Verein sind. D.h.

$$\begin{aligned}
|\text{Einwohner}| &= |A \cup B \cup C| + |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| + |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| \\
&= 20 + 50 + 40 - 5 - 5 - 5 + 2 + 10 = 107,
\end{aligned}$$

wo wir wiederum die Inlusion/Exklusion-Formel benutzt haben.

7.4 Strings

Ein String der Länge n, in dem der Teilstring 01 genau einmal vorkommt, hat die Form

$$1^{a_1} 0^{a_2 - a_1} 1^{a_3 - a_2} 0^{n - a_3}$$

mit $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq n$, wobei $0^k = \underbrace{00 \cdots 0}_{k \text{ Mal}}$ bzw. $1^k = \underbrace{11 \cdots 1}_{k \text{ Mal}}$ für alle k. Aus diesem Grund beschreibt jede 3-Teilmenge $\{a_1, a_2, a_3\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$ den String eindeutig, und deshalb gibt es $\binom{n+1}{3}$ solche Strings.

Kommt 01 genau zweimal vor, dann hat der String die Form

$$1^{a_1} 0^{a_2 - a_1} 1^{a_3 - a_2} 0^{a_4 - a_3} 1^{a_5 - a_4} 0^{n - a_4}$$

für $0 \leq a_1 < \cdots < a_5 \leq n$. Analog zum ersten Fall ist die gewünschte Anzahl Strings gleich $\binom{n+1}{5}$.

Mit einer analogen Überlegung kann man sehen, dass die Anzahl Strings der Länge n, in denen 01 genau k Mal auftritt (wobei $2k \leq n$), gerade $\binom{n+1}{2k+1}$ ist.

7.5 Kinder

Wir betrachten alle Familien mit genau zwei Kindern. Es gibt vier Gruppen solcher Familien: BB, MB, BM, MM. Hier steht MB zum Beispiel für die Familien, bei denen das jüngere Kind ein Mädchen ist und das ältere ein Bub. Diese vier Gruppen sind alle gleich gross (näherungsweise).

Wenn wir wissen, dass mindestens eins der Kinder ein Mädchen ist, dann bleiben MB, BM, MM; die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind ein Junge ist, ist also **2/3**.

Wenn wir aber wissen, dass *das jüngere* Kind ein Mädchen ist, dann bleiben nur die Möglichkeiten MB und MM, und die Wahrscheinlichkeit, dass das andere (ältere) ein Bub ist, ist in diesem Fall **1/2**.

Wie verhält es sich eigentlich, wenn ich statt der Barbie-Puppe das Kind selbst (ein Mädchen) im Garten sehe (ohne, dass ich etwas über das Alter des Geschwisters weiss)?

Allgemein gesagt hängt die Wahrscheinlichkeit stark davon ab, was genau unser Wissen über die beiden Kinder ist (das heisst, unter welchen Umständen wir etwas erfahren, und wie wir dies modellieren). Wissen wir zum Beispiel, dass das Mädchen an einem Dienstag geboren ist, dann ändert sich die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind ein Mädchen ist. (Wie kann das sein? Jeder Mensch muss schliesslich an irgend einem Wochentag geboren sein. . .) Siehe dazu: http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,708540,00.html