 Prof. Stefan Wolf

Diskrete Mathematik

Lösung 6

6.1 Äquivalenzrelationen: Konstruktion von Q aus Z

a) Zu zeigen ist, dass die definierte Relation eine Äquivalenzrelation ist, d.h. dass sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist:

- **reflexiv**: $(a, b) \sim (a, b)$. Es gilt $ab = ba$, da die Multiplikation auf **Z** kommutativ ist $\surd$
- **symmetrisch**: $(a, b) \sim (c, d) \to (c, d) \sim (a, b)$. Es gilt aus dem gleichen Grund $ad = da = bc = cb$, wiederum da die Multiplikation auf **Z** kommutativ ist $\surd$
- **transitiv**:$(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f) \to (a, b) \sim (e, f)$, d.h. gilt $ad = bc \wedge cf = de \to af = be$?
  Stellen wir zuerst fest, dass $(ax, bx) \sim (a, b)$ für alle $x \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$: $axb = bxa = axb$ (Kommutivität). Multiplizieren wir nun also die erste Gleichung mit f und die zweite mit b, wir erhalten: $adf = bcf \wedge bcf = bde$. Daraus schliessen wir $adf = bde$, woraus wir aufgrund der Eigenschaften der Multiplikation auf **Z** ($ax = bx$ mit $x \neq 0 \to a = b$) erhalten $af = be$, also $(a, b) \sim (e, f)$ $\surd$

b) Eine Äquivalenzklasse besteht aus allen Zahlenpaaren, die, als Brüche interpretiert, gleich sind, wenn beide gekürzt werden.

c) Zu zeigen ist, dass die so definierte Addition nicht vom Representanten abhängt, d.h. falls $(a', b') \sim (a, b) \wedge (c', d') \sim (c, d)$ ($\leftrightarrow a'b = b'a \wedge c'd = d'c$), dann gilt auch $(a'd' + b'c', b'd') \sim (ad + bc, bd)$.
Wir benutzen wieder die bei a) gezeigte Eigenschaft, dass $(ax, bx) \sim (a, b)$ für alle $x \neq 0$. Deshalb gilt auch

$$(a'd' + b'c', b'd') \sim (a'd'bd + b'c'bd, b'd'bd). \tag{1}$$

Aber

$$\begin{aligned}(a'd'bd + b'c'bd, b'd'bd) &= (a'bd'd + b'bc'd, b'd'bd)\\ &= (b'ad'd + b'bd'c, b'd'bd)\\ &= (b'd'ad + b'd'bc, b'd'bd),\end{aligned}$$

wo wir zuerst die Kommutativität, dann $a'b = b'a \wedge c'd = d'c$ und dann wieder die Kommutivität benutzt haben. Schliesslich ist

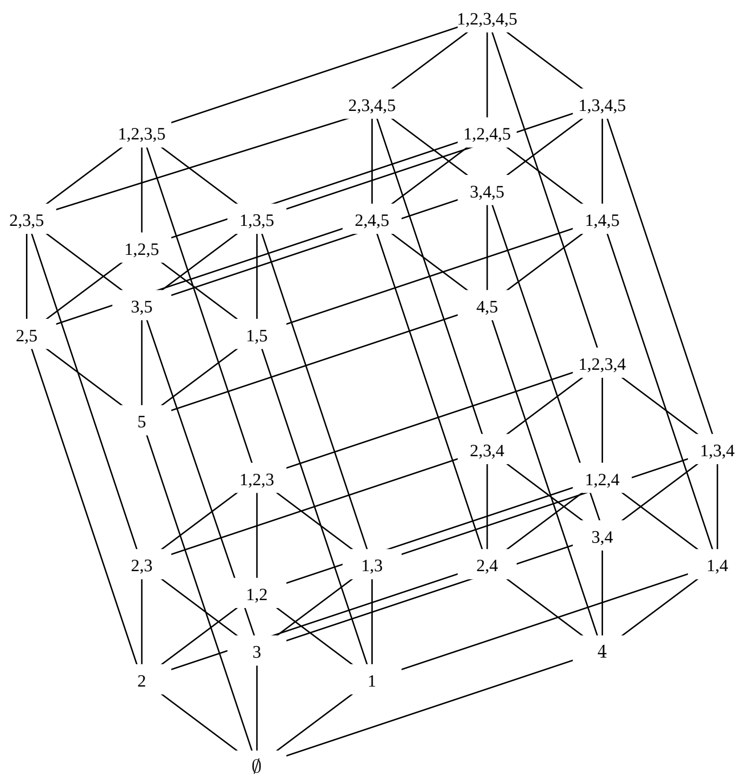
$$(b'd'ad + b'd'bc, b'd'bd) \sim (ad + bc, bd) \tag{2}$$

und somit $(a'd' + b'c', b'd') \sim (ad + bc, bd)$.
Bei der Multiplikation gehen wir gleich vor:

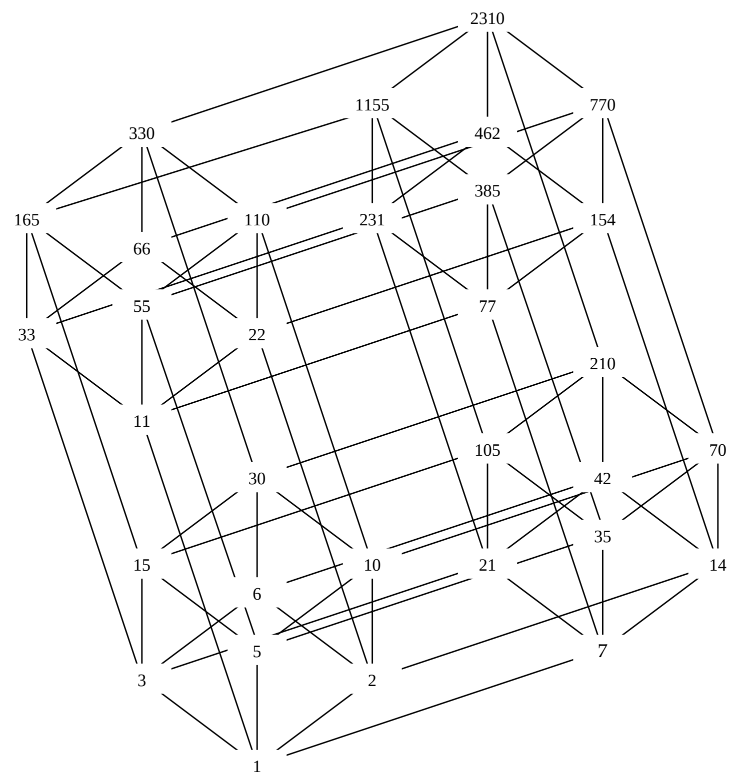
$$(a'c', b'd') \sim (a'c'bd, b'd'bd) \sim (a'bc'd, b'd'bd) \sim (b'ad'c, b'd'bd) \sim (ac, bd). \tag{3}$$

6.2 Ordnungsrelationen: Hasse-Diagramme

a)



b)



c) Sie sind identisch. Die beiden Ordnungen sind "isomorph", d.h. sie können aufeinander abgebildet werden: Wir können die Menge der Primfaktoren einer Zahl identifizieren mit ihrem Produkt, dann entspricht die Teilmengenrelation direkt der Teilbarkeit.

6.3 Funktionen: Eigenschaften

a) **Richtig.** Nehmen wir an, f sei nicht injektiv. Dann existieren $x \neq x'$ mit $f(x) = f(x')$. Dann gilt aber auch $h(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = h(x')$, also ist h nicht injektiv. Damit gilt der Schluss, denn $A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$ sind äquivalent.

b) **Falsch.** Betrachten wir folgende Fuktionen: $f(x) := e^x$, $g(x) := x^2$. Dann ist $h(x) = e^{2x}$ injektiv, aber g nicht, denn $g(-1) = g(1)$. Dies ist möglich, weil f nicht surjektiv ist: g ist zwar nicht injektiv, aber eingeschränkt auf den Wertebereich von f (die positiven rellen Zahlen) schon.

c) **Richtig.** Jedes $y \in \mathcal{C}$, welches nicht im Bildbereich von g liegt, kann auch nicht im Bildbereich von h liegen.

6.4 Kombinatorik: The Party

a) Jedes "ping!" erfordert genau zwei Leute, d.h. eine zweielementige Teilmenge der insgesamt n Leute. Die Gesamtzahl der "ping!"s beträgt deshalb $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$.

b) Sei $p_i \in \mathbf{Z}$ die Anzahl der Leute mit denen die $i$te Person, $i \in \{1, \ldots, n\}$, anstösst. Ausserdem bezeichne p die Gesamtzahl der "ping!"'s.

Durch doppeltes Abzählen erhalten wir

$$2p = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} p_i \ .$$

Wir teilen die Leute in zwei Untermengen auf. $\mathcal{U} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \ : \ 2 \not| p_i\}$ und $\mathcal{G} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \ : \ 2 \mid p_i\}$, d.h. die Menge der Personen, die mit einer ungeraden bzw. mit einer geraden Anzahl anderer Leute angestossen haben.

Somit lässt sich obige Summe wie folgt umschreiben

$$2p = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} p_i = \sum_{i \in \mathcal{G}} p_i + \sum_{i \in \mathcal{U}} p_i.$$

Oder auch

$$2p - \sum_{i \in \mathcal{G}} p_i = \sum_{i \in \mathcal{U}} p_i.$$

Die beiden Terme auf der linken Seite der Gleichung sind gerade, und damit deren Differenz. Somit muss auch die Summe auf der rechten Seite der Gleichung gerade sein. Da p_i für $i \in \mathcal{U}$ ungerade ist, folgt, dass $|\mathcal{U}|$ gerade ist.

c) Wir beobachten, dass es keine zwei Personen i, j geben kann, so dass Person i mit keiner anderen Person anstösst, $p_i = 0$, und Person j mit allen anderen Personen anstösst, $p_j = n - 1$. Für unseren Fall bedeutet dies, dass entweder $p_k \in \{1, \ldots, n-1\}$ oder $p_k \in \{0, \ldots, n-2\}$ gilt für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$. Also gibt es höchstens $n-1$ verschiedene Möglichkeiten für p_i. Insgesamt befinden sich aber n Leute an der Party, also muss für mindestens ein Paar $p_i = p_j$ gelten.

d) Die Gesprächsthemen bilden eine Menge G von 20 Elementen, $|G| = 20$. Die Leute der Party bilden eine Menge L von n Personen, $|L| = n$.

Nun zählen wir die "Gesprächsthemen-Personen"-Paare zweimal, auf verschiedene Arten.

$$\begin{aligned} \sum_G 4 &= \sum_L 10 \\ n \cdot 4 &= 20 \cdot 10 \end{aligned}$$

Daraus folgt nun $n = 200/4 = 50$.