Prof. Stefan Wolf

Diskrete Mathematik

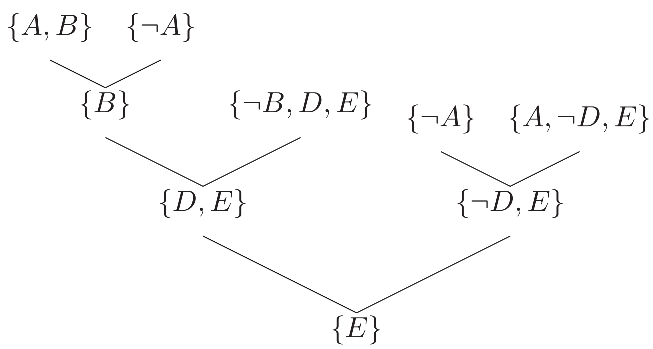
Lösung 4

4.1 Resolventenmenge

$\text{Res}^*(F) = \{\{A, B\}, \{\neg B, C\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}, \{A, C\}, \{\neg A, \neg B\}\}$.

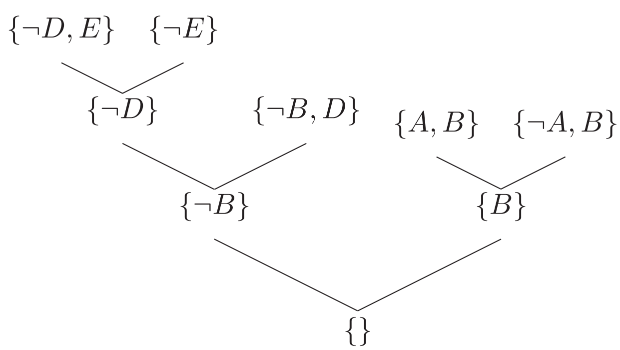
4.2 Resolution

a) Die Klauseln sind $\{A, B\},\ \{\neg B, D, E\},\ \{A, \neg D, E\},\ \{\neg A\}$.



Die Formel ist weder eine Tautologie noch unerfüllbar: Die Resolution hat uns gezeigt, dass die erfüllenden Belegungen *genau* jene sind, für die gilt: $\mathcal{A}(A) = 0$, $\mathcal{A}(B) = 1$ und $\mathcal{A}(E) = 1$.

b) Die Klauseln sind $\{A, B\},\ \{\neg E\},\ \{\neg B, D\},\ \{\neg D, E\},\ \{\neg A, B\}$.



Die Formel ist somit unerfüllbar!

c) Diese Formel ist eine Tautologie, denn in der ersten Klausel gibt es sowohl A als auch $\neg A$, in der zweiten sowohl B als auch $\neg B$ und in der dritten C und $\neg C$. Beachten Sie, dass eine solche Konstellation *die einzig mögliche* ist, welche eine KNF-Formel zur Tautologie macht.

4.3 Folgerungen

a) In Aufgabe 4.2.b) haben wir gezeigt, dass die Verundung der Prämissen zusammen mit der Negation der Konklusion unerfüllbar ist. Dies bedeutet — und beweist —, dass die Folgerung korrekt ist.

b) Diese Folgerung ist falsch.

Betrachten wir die Belegung $A = 1, B = 0, C = 0$. Sie macht beide Prämissen wahr, aber die Konklusion trotzdem falsch.

Die Moral ist, dass es in der Resolution nicht erlaubt ist, in einem Schritt gleich zwei Atome auszulöschen (in diesem Fall A, $\neg A$ und B, $\neg B$).

4.4 Sushi

Wir führen folgende Variablen ein:
K=Kartoffeln, O=Öl, R=Reis, B=Rindfleisch, F=Fisch, W=Wasabi, P=Pommes Frites, H=Kartoffelsalat, S=Sushi.
Dann übersetzt sich der Text in folgende Klauseln. (Beispiel: $B \wedge P \to W$ wird zu $\{\neg B, \neg P, W\}$.)

$$\{K\}, \{O\}, \{R\}, \{\neg B, \neg P, W\}, \{\neg K, \neg O, P\}, \{\neg K, \neg O, H\},$$

$$\{\neg F, \neg R, \neg W, S\}, \{\neg R, \neg H, F\}, \{\neg R, \neg H, B\}$$

Ich möchte wissen, ob diese Klauselmenge S impliziert. Daher füge ich die Klausel $\{\neg S\}$ hinzu und resolviere. Die Resolution zeigt: unerfüllbar! Ich kann also Sushi machen.

Die Hornlogik lehrt uns auch, wie wir aus der Resolution den “Weg” zum Sushi ablesen können.

4.5 Kloster

Die 42 erkrankten Mönche verschwinden nach genau 42 Tagen in ihren Zellen.

Wir können mit Induktion beweisen: Wenn genau k Mönche krank sind, so verschwinden sie nach genau k Tagen.
Induktionsverankerung. Ist $k = 1$, so weiss der betroffene Mönch sofort, dass er krank ist. Der Abt hat gesagt, die Krankheit sei da, aber er sieht keinen anderen kranken, also muss *er* es sein.
Induktionssschritt. Angenommen, die Aussage stimmt für k. Seien jetzt $k+1$ Mönche krank. Jeder dieser kranken Mönche sieht k andere kranke, es gibt aus seiner Sicht also zwei Möglichkeiten: Er selbst ist gesund und k sind insgesamt krank, oder er ist auch krank und es sind $k + 1$. Wenn aber am k-ten Tag noch alle auftauchen, so weiss er, wegen der Induktionsvoraussetzung, dass es der zweite Fall sein muss. Alle $k + 1$ machen die gleiche Überlegung und bleiben daher am $k + 1$-ten Tag weg.