Diskrete Mathematik

Lösung 3

3.1 Semantik der Aussagenlogik

a)

A	$\rightarrow$	(	B	$\rightarrow$	(	A	$\leftrightarrow$	B	)	)
0	**1**		0	1		0	1	0		
0	**1**		1	0		0	0	1		
1	**1**		0	1		1	0	0		
1	**1**		1	1		1	1	1		

Die Aussage ist eine Tautologie. (Und damit natürlich auch erfüllbar.)

b)

A	$\rightarrow$	(	$\neg$	B	$\rightarrow$	(	A	$\oplus$	B	)	)
0	**1**		1	0	0		0	0	0		
0	**1**		0	1	1		0	1	1		
1	**1**		1	0	1		1	1	0		
1	**1**		0	1	1		1	0	1		

Die Aussage ist eine Tautologie.

c)

(	A	$\oplus$	B	)	$\leftrightarrow$	(	A	$\leftrightarrow$	B	)
	0	0	0		**0**		0	1	0	
	0	1	1		**0**		0	0	1	
	1	1	0		**0**		1	0	0	
	1	0	1		**0**		1	1	1	

Die Aussage ist unerfüllbar.

d)

(	(	A	$\oplus$	B	)	$\oplus$	$\neg$	A	)	$\leftrightarrow$	B
		0	0	0		1	1	0		**0**	0
		0	1	1		0	1	0		**0**	1
		1	1	0		1	0	1		**0**	0
		1	0	1		0	0	1		**0**	1

Die Aussage ist unerfüllbar.

e)

(	A	$\to$	B	)	$\land$	(	C	$\to$	A	)	$\to$	$\neg$	(	B	$\oplus$	C	)
	0	1	0		1		0	1	0		**1**	1		0	0	0	
	0	1	0		0		1	0	0		**1**	0		0	1	1	
	0	1	1		1		0	1	0		**0**	0		1	1	0	
	0	1	1		0		1	0	0		**1**	1		1	0	1	
	1	0	0		0		0	1	1		**1**	1		0	0	0	
	1	0	0		0		1	1	1		**1**	0		0	1	1	
	1	1	1		1		0	1	1		**0**	0		1	1	0	
	1	1	1		1		1	1	1		**1**	1		1	0	1	

Die Aussage ist weder eine Tautologie noch unerfüllbar.

3.2 Höchstens zwei aus vier

Es müssen mindestens zwei falsch sein:

$$(\neg A \land \neg B) \lor (\neg A \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg D) \lor (\neg B \land \neg C) \lor (\neg B \land \neg D) \lor (\neg C \land \neg D)\ .$$

Wir können via Negation gehen: Es soll nicht so sein, dass mindestens drei wahr sind. So erhalten wir die (semanisch äquivalente) Formel:

$$\neg((A \land B \land C) \lor (A \land B \land D) \lor (A \land C \land D) \lor (B \land C \land D))\ .$$

3.3 Normalformen

a) Die Formel ist eine Tautologie. $A \lor \neg A$ ist damit sowohl DNF als auch KNF.

b) Mittels der Wahrheitstabellenmethode der Vorlesung kommt man, wenn man die "1-Zeilen" nimmt, auf die DNF:

$$(\neg A \land \neg B \land C) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor (A \land B \land \neg C)\ .$$

Die "0-Zeilen" hingegen führen uns auf die KNF:

$$(A \lor B \lor C) \land (A \lor \neg B \lor C) \land (A \lor \neg B \lor \neg C) \land (\neg A \lor B \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C)\ .$$

c) Die DNF:

$$(A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land C) \lor (A \land B \land C)\ .$$

Die KNF:

$$(A \lor B \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor C) \land (\neg A \lor B \lor \neg C) \land (A \lor \neg B \lor \neg C)\ .$$

3.4 Wahrheitstabellen und semantische Äquivalenz

F ist Tautologie: alle Wahrheitsbelegungen sind Modelle.

G ist keine Tautologie. Es gibt eine Belegung, die kein Modell ist: $A = 1,\ B = 0,\ C = 1$. (Es ist die einzige.)

Sie sind also *nicht* äquivalent: Tautologien sind nur zu anderen Tautologien äquivalent.

3.5 Folgerungen

a)

F	G	$\neg(F \oplus G)$	$F \vee G$	$F \wedge G$	
1	1	1	1	1	$\longleftarrow$
1	0	0	1	0	x
0	1	0	1	0	x
0	0	1	0	0	x

b)

F_1	F_2	F_3	$F_1 \rightarrow F_2$	$F_2 \rightarrow F_3$	$F_3 \rightarrow F_1$	$(F_1 \leftrightarrow F_2) \wedge (F_2 \leftrightarrow F_3)$	
1	1	1	1	1	1	1	$\longleftarrow$
1	1	0	1	0	1	0	x
1	0	1	0	1	1	0	x
1	0	0	0	1	1	0	x
0	1	1	1	1	0	0	x
0	1	0	1	0	1	0	x
0	0	1	1	1	0	0	x
0	0	0	1	1	1	1	$\longleftarrow$

c)

L	F	G	$(L \vee F) \wedge (\neg L \vee G)$	$F \vee G$	
1	1	1	1	1	$\longleftarrow$
1	1	0	0	1	x
1	0	1	1	1	$\longleftarrow$
1	0	0	0	0	x
0	1	1	1	1	$\longleftarrow$
0	1	0	1	1	$\longleftarrow$
0	0	1	0	1	x
0	0	0	0	0	x

3.6 Das Schaf und die vierzig Löwen

a) $B_0 = 0$ und $B_1 = 1$, denn ein Schaf wird nicht gefressen von 0 Löwen und es wird sicher gefressen von einem Löwen.

$B_2 = 0$, denn wenn ein Löwe das Schaf essen würde und selber zum Schaf wird, dann wird er gemäss obiger Überlegung gefressen. Mit anderen Worten, $B_2 = 0$ gilt, weil $B_1 = 1$ wahr ist.

$B_3 = 1$, denn wenn ein Löwe das Schaf frisst und selber zum Schaf wird, dann bleiben noch 2 Löwen übrig, welche ihn nicht fressen, da sie nicht gefressen werden wollen. Kurz: $B_3 = 1$ weil $B_2 = 0$ — er frisst, weil er nichts zu befürchten hat!

b) Allgemein: Ein Löwe frisst *genau dann*, wenn er nachher nicht gefressen wird:

$$B_n = \neg B_{n-1} \, .$$

Rekursionsverankerung: $B_0 = 0$.

c)

$$B_n = \underbrace{\neg\neg\neg\cdots\neg}_{n} B_0 = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$