Diskrete Mathematik

Lösung 10

10.1 Zusammenhang und Kreise

a) $m = n$. Für $m = n - 1$ kann es noch ein Baum sein. Wir haben andererseits in der Vorlesung gesehen, dass jeder Graph, der so viele Kanten hat wie Knoten, einen Kreis haben muss.

b) $m = 2$. Es gibt keinen Kreis mit zwei Kanten. Ein Graph mit drei Kanten kann einen Kreis haben.

c)
$$m = \binom{n-1}{2} + 1\ .$$
Ein Graph mit $\binom{n-1}{2}$ Kanten kann der vollständige Graph mit $n - 1$ Knoten plus ein isolierter Knoten sein. Wenn er eine Kante mehr hat, muss er aber auch den letzten Knoten mit dem Rest verbinden.

d) $m = n - 2$. Wir wissen, dass so ein Graph mindestens zwei Zusammenhangskomponenten haben muss. Hat er eine Kante mehr, kann es ein Baum sein.

10.2 Cayley

Sei G_n der Graph, der entsteht, wenn wir aus K_n die Kante $\{v_1, v_2\}$ entfernen. Die Anzahl der Spannbäume eines Graphen G bezeichnen wir mit $ST(G)$. Sei weiter t_n die Anzahl Spannbäume in K_n, welche die Kante $\{v_1, v_2\}$ enthalten.
Die Anzahl Spannbäume von G_n ist dann
$$ST(G_n) = ST(K_n) - t_n.$$
Wir bestimmen nun t_n durch *doppeltes Abzählen* der Menge der Kanten, die alle Spannbäume von K_n zusammengezählt besitzen.

Zur Erinnerung:
(i) K_n besitzt $\binom{n}{2}$ Kanten, nämlich alle möglichen Knotenpaare.
(ii) K_n hat genau n^{n-2} Spannbäume; das ist Cayleys Formel.

Nun hat jeder Spannbaum genau $n-1$ Kanten. Andererseits kommt — aus Symmetriegründen — *jede* Kante (und nicht nur $\{v_1, v_2\}$) in genau t_n Spannbäumen vor.
Also können wir die Anzahl Kanten aller Spannbäume zusammen auf zwei Arten zählen:
$$\binom{n}{2} \cdot t_n \quad = \quad n^{n-2} \cdot (n-1)\ .$$

Wir lösen nach der Unbekannten t_n auf:

$$t_n = \frac{n^{n-2}(n-1)}{\binom{n}{2}} = \frac{n^{n-2}(n-1)}{\frac{n(n-1)}{2}} = 2n^{n-3} \, .$$

Die Anzahl Spannbäume von G_n ist also

$$ST(G_n) = n^{n-2} - 2n^{n-3} = n^{n-3}(n-2) \, .$$

10.3 Euler

Wir beweisen, dass ein einfacher ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit mindestens zwei Knoten genau dann eine offene Eulertour hat, wenn *genau zwei Knoten einen ungeraden Grad* haben.

Diese Bedingung ist notwendig. Die beiden Enden der offenen Eulertour müssen einen ungeraden Grad haben, während die restlichen Knoten einen geraden Grad haben müssen, wie im Fall einer (geschlossenen) Eulertour.

Wir zeigen nun, dass die Bedingung auch hinreichend ist. Seien $u, v \in V$ die beiden Knoten mit einem ungeraden Grad. Wir erweitern den Graphen $G = (V, E)$ zu einem Graphen $G' = (V', E')$ mit $V' := V \cup \{w\}$ (wobei $w \notin V$) und $E' := E \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\}$. Es ist einfach zu verifizieren, dass alle Knoten in G' einen geraden Grad haben (u und v besitzen je einen Nachbarknoten mehr, w hat Grad 2, und alle andere Knotengrade sind unverändert). Der Graph G' hat deswegen eine geschlossene Eulertour, die insbesondere durch die Kanten $\{u, w\}$ und $\{w, v\}$ — und zwar direkt nacheinander, da w gar keine anderen Nachbarn hat — geht. Entfernt man diese aus der Tour, bilden die restlichen Kanten eine offene Eulertour in G, die bei u beginnt und bei v endet, oder umgekehrt.

10.4 Hamilton

Wir fixieren zuerst einen beliebigen Startknoten $v \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gibt es $(n-1)!$ mögliche Reihenfolgen, die restlichen Knoten zu besuchen; also zusammen $n!$ Kreise.

Wenn wir Kreise identifizieren, die sich nur im Startknoten oder im "Umlaufssinn" unterscheiden, dass haben wir jeden Kreis $2n$ mal gezählt, und es bleiben noch $(n-1)!/2$ verschiedene Hamiltonkreise.

Für $k < n$ gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, die Knoten eines Kreises der Länge k zu wählen, und, wie eben, $\frac{(k-1)!}{2}$ Kreise, die diese k Knoten enthalten. Insgesamt gibt es also

$$\binom{n}{k} \frac{(k-1)!}{2} \tag{1}$$

verschiedene Kreise der Länge k.

Oder anders überlegt: Für den Startknoten haben wir n Möglichkeiten, für den nächsten $n-1$, und schliesslich für den k-ten $n-k+1$. Dann haben wir aber, wieder wie oben, jeden Kreis $2k$ mal gezählt. Also alles zusammen

$$\frac{n!}{2k \cdot (n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{2k} \tag{2}$$

Kreise. In der Tat sind die Ausdrücke (1) und (2) gleich. (Glück gehabt. . .)

10.5 Indiskret

Seien $P_1, P_2, \ldots, P_n$ die Punkte auf der Kreisperipherie (in der Reihenfolge, in der sie liegen). Wir machen nun folgende Beobachtung:

Der Kreismittelpunkt liegt genau dann nicht im n-Eck, wenn es mindestens einen Punkt P_i gibt mit der Eigenschaft, dass alle anderen links von ihm liegen.

Nennen wir das beschriebene Ereignis A_i. Wir meinen damit: Alle anderen P_j, $j \neq i$, werden von einem Zeiger überstrichen, wenn er, ausgehend von P_i, eine Halbdrehung im Uhrzeigersinn macht. Weil die Punkte unabhängig gewählt wurden, gilt

$$\mathrm{Prob}\left[A_i\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} .$$

Was uns jetzt interessiert ist

$$\mathrm{Prob}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] .$$

Die entscheidende Beobachtung ist, dass die Ereignisse A_i paarweise disjunkt sind, d.h. nur mit Wahrscheinlichkeit 0 gemeinsam auftreten können: Es ist nicht möglich, dass P_j links von P_i liegt und P_i links von P_j (ausser vielleicht wenn sie Antipoden sind, aber eben, das hat sowieso WSK 0); also können A_i und A_j nicht gemeinsam auftreten. In diesem Fall sagt und die stetige Version der Summenregel:

$$\mathrm{Prob}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}[A_i] = \frac{n}{2^{n-1}} .$$

Die gefragte WSK ist die GegenWSK, also $1 - n/2^{n-1}$.