Prof. Stefan Wolf

Induction/Recursion Examples

Lösung 2

2.1 Fibonacci

a) Der Beginn der Fibonacci-Folge ist

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots \ .$$

Wenn man bei einer Ananas oder einem Tannzapfen die Anzahl identischer Linien einer bestimmten Art ("Steilheit") zählt, so erhält man immer eine Fibonacci-Zahl! Die Tatsache, dass diese Folge auch in anderen Zusammenhängen in der Natur vorkommt — die Anzahl Enden eines Hirschgeweihs! — war wohl die Inspiration für das Kunstwerk in der Bahnhofshalle.

Berechnet man das Verhältnis aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen, so strebt dieses gegen den goldenen Schnitt: "Das Kleine zum Grossen ist wie das Grosse zum Ganzen".

b) Induktionsverankerung: $f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) = 0$ und

$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1$.

Induktionsannahme: für alle $i < n + 2$ gilt $f_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right)$.

Induktionsschritt: Für eine bessere Übersicht setzen wir $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned}
f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n = \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{r^n - s^n}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(r^{n+1} - s^{n+1} + r^n - s^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(r^n(r+1) - s^n(s+1)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(r^n\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - s^n\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(r^{n+2} - s^{n+2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir folgende Tatsache verwendet:
$(r + 1) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = r^2$ und $(s + 1) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = s^2$. In der Tat sind r und s gerade die

Lösungen der Gleichung $x^2 = x + 1$ oder äquivalent $1 : x = (x - 1) : 1$. Das ist die Gleichung des "Goldenen Schnitts"!

2.2 Primus inter pares

a) Induktionsverankerung $n = 1$:

$$5 = F_1 = F_0 + 2 = 3 + 2 \,.$$

Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} F_i &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i \right) \cdot F_n \\ &= (F_n - 2) F_n \\ &= \left(2^{2^n} - 1 \right) \left(2^{2^n} + 1 \right) \\ &= \left(2^{2^n} \right)^2 - 1 \\ &= 2^{2^{n+1}} - 1 \quad = \quad F_{n+1} - 2 \,. \end{aligned}$$

Wir haben in der zweiten Gleichung von der Induktionsvoraussetzung, also der Aussage für n, Gebrauch gemacht.

b) Sei $i < j$. Sei a ein Teiler von F_i und F_j. Wegen der obigen Formel ist es auch einer von $F_j - 2$, und daher von 2. Die Fermat-Zahlen sind alle ungerade, also kann es nicht 2 sein: Daher $a = 1$.

c) Jede Fermat-Zahl ist durch mindestens eine Primzahl teilbar. ("Viele" davon sind selber prim.) Diese Primzahlen müssen aber alle voneinander verschieden sein. Also gibt es unendlich viele davon.