

Induction/Recursion Examples

Übung 2

2.1 Fibonacci

Die Fibonacci-Folge ist wie folgt definiert:

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1 \quad \text{und} \quad f_n := f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{falls } n \geq 2.$$

- Was hat diese Folge mit einer Ananas zu tun? Mit einem Tannzapfen? Mit der Haupthalde des Zürcher Hauptbahnhofs?
- Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

gilt für alle $n \geq 0$.

2.2 Primus inter pares

Ziel dieser Aufgabe ist, zu zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

- Sei

$$F_n := 2^{2^n} + 1.$$

F_n heisst n -te *Fermat-Zahl*. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$F_n := \prod_{i=0}^{n-1} F_i + 2$$

gilt für alle $n \geq 1$.

- Schliessen Sie daraus, dass zwei beliebige verschiedene Fermat-Zahlen *teilerfremd* sind, d.h., dass sie (ausser 1) keine gemeinsamen Teiler besitzen.
- Schliessen Sie daraus, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss.