ETH Zürich, D-INFK
HS 10, 8.11.10

Prof. Stefan Wolf

Diskrete Mathematik
Übung 8

8.1 Vorstand und Präsident

Beweisen Sie kombinatorisch

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \, .$$

Tipp. Auf wie viele Arten kann ein Verein mit n Mitgliedern einen Vorstand mit Präsident wählen?

8.2 Permutationen

Eine Permutation π auf n Elementen ist eine bijektive Abbildung

$$\pi \; : \; \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\} \, .$$

Sie kann geschrieben werden als $2 \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} .$$

Permutationen können verknüpft werden; wir schreiben $\pi \circ \rho$ und meinen, dass zuerst π und dann ρ ausgeführt wird.

Jede Permutation hat eine eindeutig bestimmte *Zyklenstruktur*, welche beschreibt, in wie viele Zyklen welcher Grösse sie zerfällt.

a) Bestimmen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

b) Bestimmen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} .$$

c) Schreiben Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

in Zyklendarstellung. Was beobachten Sie?

d) Wie viele verschiedene Zyklenstrukturen von Permutationen von 10 Elementen gibt es?

e) Für eine bestimmte solche Zyklenstruktur, wie viele verschiedene Permutationen von 10 Elementen gibt es mit ebendieser Struktur?

8.3 Rekursionen

Lösen Sie die folgenden Rekursionen.

a)

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\ , \quad a_0 = 4\ , \quad a_1 = 6\ .$$

b)

$$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}\ , \quad b_0 = 1\ , \quad b_1 = 3\ .$$

8.4 Cantormenge

Betrachten Sie den folgenden Prozess: Aus dem Einheitsintervall

$$M_0 := [0,1] := \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

wird das "offene" (d.h. ohne Randpunkte) Mitteldrittel entfernt, und übrig bleibt die Menge

$$M_1 := [0,1/3] \cup [2/3,1]\ .$$

Dieser Prozess wird fortgesetzt: M_{i+1} entsteht aus M_i, indem aus jedem Teilintervall das offene Mitteldrittel herausgeschnitten wird. Wir haben dann z.B.

$$M_2 := [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1]\ .$$

Die *Cantormenge* ist dann

$$C := \bigcap_{i=0}^{\infty} M_i\ .$$

Sie ist aus verschiedenen Gründen interessant: Wenn wir eine zufällige Zahl $r \in [0,1]$ wählen, dann ist die WSK 0, dass sie in C liegt, obwohl C gleich viele Elemente hat wie $[0,1]$.

Ein anderer Punkt ist, dass die *Dimension* der Menge *nicht ganzzahlig* ist; eine solche Menge heisst *Fraktal*. Ein Quadrat mit Seitenlänge 2 hat eine um 2^2 grössere Fläche als eins mit Seitenlänge 1; genauer: in Dimension $d = 2$ besteht das um den Faktor $f = 2$ grössere Quadrat aus $f^d = 2^2 = 4$ identischen Kopien des kleineren. Bei einem Würfel beträgt dieser Faktor 2^3.

Wie gross ist nun gemäss dieser Überlegung die Dimension von C?