

# Diskrete Mathematik

## Übung 7

### 7.1 Binomialkoeffizienten

- a) Beweisen Sie mit einem kombinatorischen Argument, dass für alle  $n \geq 1$

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

gilt.

- b) Beweisen Sie mit einem kombinatorischen Argument, dass für alle  $n \geq 1$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

gilt.

### 7.2 Glühbirnen

- a) Zeigen Sie: Die Summe aller Zahlen in der  $n$ -ten Zeile des Pascal-Dreiecks ist  $2^n$ ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n .$$

- b) Zeigen Sie: Wenn wir in der  $n$ -ten Zeile des Pascal-Dreiecks *alternierende Vorzeichen* setzen, dann ist die Summe der Zahlen 0,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 .$$

Folgern Sie daraus, dass wenn von  $n$  Glühbirnen jede mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  ausfällt, unabhängig von den andern, dann die Wahrscheinlichkeit, dass eine *gerade* Anzahl Birnen ausfällt, genau  $1/2$  ist!

- c) Benützen Sie die Formel aus b), um sehr einfach das Inklusions-Exklusions-Prinzip zu beweisen. Sei  $x$  ein beliebiges Element in der Vereinigung der Mengen  $A_1, \dots, A_n$ ;  $x$  komme dabei in genau  $j$  der Mengen vor. Bestimmen Sie, wie oft  $x$  in der Summe der Inklusions-Exklusions-Formel gezählt wird.

### 7.3 Inklusion/Exklusion

- a) Wie viele der Zahlen von 1 bis 300 sind durch 4, 6 oder 15 teilbar? (Das "oder" ist, wie üblich, nicht exklusiv zu verstehen.)
- b) In einem Dorf gibt es drei Vereine. Nur zehn Bewohner sind Mitglied in gar keinem. Verein A hat 20, Verein B 50, und Verein C 40 Mitglieder. Wenn wir zwei beliebige Vereine nehmen, gibt es immer genau fünf Leute, die in beiden sind. Und schliesslich sind genau zwei Personen in allen drei Vereinen. Wie viele Leute wohnen eigentlich in diesem Dorf?

### 7.4 Strings

Bestimmen Sie die Anzahl binärer Strings der Länge  $n$ , in denen der Teilstring 01 *genau einmal* vorkommt. Ein Beispiel eines solchen Strings (der Länge 10) ist

11110**0**1110 .

In wie vielen Strings kommt 01 genau zwei Mal vor? Beispiel:

1110**0**11111100**0**111000 .

Überprüfen Sie Ihre Resultate für  $n \leq 4$ .

### 7.5 Kinder

Sie wissen, dass Ihr neuer Nachbar genau zwei Kinder hat. Eines Tages sehen Sie eine Barbie-Puppe im Garten liegen und nehmen an, eins der Kinder sei wohl ein Mädchen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind ein Bub ist? Dieses zweite Kind sehen Sie nie, aber Sie erfahren, dass es zwanzigjährig ist und daher nicht mit Puppen spielt. Nochmals: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses andere Kind ein Bub ist?