

Diskrete Mathematik

Übung 6

6.1 Äquivalenzrelationen: Konstruktion von \mathbf{Q} aus \mathbf{Z}

Sei \sim die folgende Relation auf $A := \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$:

$$(a, b) \sim (c, d) :\leftrightarrow ad = bc .$$

- Beweisen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf A ist.
- Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen.
- Zeigen Sie, dass folgende Operationen auf den Klassen wohldefiniert (also unabhängig von den Repräsentaten) sind:

$$\begin{aligned} [(a, b)] + [(c, d)] &:= [(ad + bc, bd)] , \\ [(a, b)] \cdot [(c, d)] &:= [(ac, bd)] . \end{aligned}$$

Die resultierende Struktur wird als *rationale Zahlen* \mathbf{Q} bezeichnet.

6.2 Ordnungsrelationen: Hasse-Diagramme

- Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Teilmengen-Relation auf der Menge $\mathbf{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$.
- Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Teilbarkeits-Relation auf der Menge aller positiven Teiler von 2310.
- Vergleichen Sie die beiden Diagramme. Was stellen sie dar?

6.3 Funktionen: Eigenschaften

Seien $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ und $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ Funktionen, und sei $h := g \circ f$ ihre Komposition. Entscheiden Sie, welche der folgenden Schlüsse korrekt sind (durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel).

- Falls h injektiv ist, so ist auch f injektiv.
- Falls h injektiv ist, so ist auch g injektiv.
- Falls h surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

6.4 Kombinatorik: The Party

- a) Sie sind auf einer Party mit insgesamt n Leuten. Stößen alle miteinander an, wie oft machte es "ping!"?
- b) Leider nimmt die Party nicht diesen Verlauf: Nicht alle mögen einander, und es stossen deshalb auch nicht alle miteinander an. Natürlich langweilen Sie sich, denken über Paritäten nach, und fragen sich, ob die Anzahl Leute, die mit einer ungeraden Anzahl anderer Leute angestossen haben, sowohl gerade als auch ungerade sein kann. Was denken Sie? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- c) Nachdem Sie die Antwort gefunden haben, fragen Sie sich weiter, ob es wohl an der Party mit Sicherheit zwei Leute gibt, die mit genau gleich vielen angestossen haben. . . (Begründen Sie.)
- d) Übrigens, an der Party gab es 20 verschiedene Gesprächsthemen, über jedes haben genau zehn Personen gesprochen, und jede Person hat über genau vier verschiedene Themen geplaudert. Wie viele Leute waren eigentlich da?