ETH Zürich, D-INFK
HS 10, 18.10.10

Prof. Stefan Wolf

Diskrete Mathematik
Übung 5

5.1 Vollständige Induktion

a) Was ist falsch an folgendem Induktionsbeweis?

Behauptung. Alle Menschen haben die selbe Haarfarbe.

Beweis. Wir beweisen die Aussage "In einer Gruppe von n Menschen haben alle die selbe Haarfarbe" mit Induktion über n.

Verankerung. Offensichtlich stimmt die Behauptung für eine Einzelperson, also $n = 1$.

Induktionsschritt. Betrachten wir eine Gruppe von $n+1$ Menschen, und sondern daraus auf zwei Arten n aus, also durch Weglassen einer jeweils anderen Person. Gemäss Induktionsvoraussetzung müssen die Leute in diesen beiden Gruppen von n Personen die gleiche Haarfarbe haben. Wegen der Leute, die in beiden Gruppen sind, muss diese Farbe für beide Gruppen die selbe sein. Also haben alle $n+1$ die gleiche Haarfarbe. qed.

b) Das *allgemeine Induktionsprinzip* ist der folgende Schluss:
(a) **Falls** $A(0)$ richtig ist, und
(b) **falls** für alle $i \geq 0$ die Tatsache, dass $A(0), A(1), \ldots, A(i)$ alle richtig sind, impliziert, dass auch $A(i+1)$ richtig ist,
dann muss $A(n)$ richtig sein für alle $n \in \mathbf{N}$.

Beweisen Sie mit diesem Prinzip: Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist durch eine Primzahl teilbar.

5.2 My Baby and Me

In einem Lied kommt der Satz vor: *Everybody loves my baby, but my baby loves just me!* Analysieren Sie den Satz vom streng logischen Standpunkt. Was folgt aus ihm?

5.3 Homolog und heterolog

Wir betrachten folgende Klassifikation für Adjektive: Wir nennen ein Adjektiv *homolog*, falls das entsprechende Wort selbst die Eigenschaft hat, die es ausdrückt. Beispiele von homologen Adjektiven sind: *kurz* (weil "kurz" ein kurzes Wort ist), *dreisilbig*. Adjektive, die umgekehrt sich selbst nicht korrekt beschreiben, nennen wir *heterolog*. Beispiele heterologer Wörter sind: *lang* (weil "lang" ein kurzes Wort ist), *fünfsilbig*.

a) Finden Sie je drei weitere Adjektive.

b) In welche Sparte gehört das Wort *heterolog*?

5.4 Mengenkalkül

Beweisen Sie, dass die folgenden Regeln für beliebige Mengen A, B und C gelten.

a) Idempotenz.

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

b) Distributivität.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

c) De Morgan.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

d) Diskutieren Sie die offensichtliche Dualität, also die Möglichkeit, in einer Regel $\cap$ und $\cup$ zu vertauschen um eine andere zu erhalten.

5.5 Potenzmenge

Sei M eine Menge. Die *Potenzmenge* von M, $P(M)$, ist die Menge aller Teilmengen von M: $P(M) := \{A \,|\, A \subseteq M\}$.

a) Was ist $P(\emptyset)$? Was $P(\{1, 2, 3\})$?

b) Sei M eine *endliche* Menge mit m Elementen. Zeigen Sie, dass $P(M)$ genau 2^m Elemente besitzt.

c) Zeigen Sie, dass für jede beliebige (im allgemeinen unendliche) Menge gilt, dass es *keine* bijektive Abbildung zwischen M und $P(M)$ geben kann.

Eine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heisst *injektiv*, falls für $a, a' \in \mathcal{A}$ mit $a \neq a'$ auch gilt $f(a) \neq f(a')$. Sie heisst *surjektiv*, falls für alle $b \in \mathcal{B}$ ein $a \in \mathcal{A}$ existiert mit $f(a) = b$. Sie ist *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv zugleich ist. Das heisst dann, dass für alle $b \in \mathcal{B}$ *genau ein* $a \in \mathcal{A}$ existiert mit $f(a) = b$; f führt also auf eine eins-zu-eins-Entsprechung der Elemente von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Tipp: Betrachten Sie eine Abbildung $f : M \to P(M)$. Zeigen Sie, dass f niemals surjektiv sein kann, das heisst, es gibt $A \subseteq M$ so dass $f(x) \neq A$ für alle $x \in M$. Benützen Sie, um A zu konstruieren, einen ähnlichen Trick wie in bei der "Russell-Antinomie".

5.6 Äquivalenzrelation?

Sei A eine Menge und sei $\sim$ eine Relation auf A mit den folgenden drei Eigenschaften:

- $\forall x \exists y (x \sim y)$,
- $\forall x \forall y (x \sim y \leftrightarrow y \sim x)$,
- $\forall x \forall y \forall z (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)$.

Ist dann $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A? Beweisen Sie es, oder geben Sie ein Gegenbeispiel.