Diskrete Mathematik
Übung 3

3.1 Semantik der Aussagenlogik

Ab dieser Aufgabe verwenden wir nicht mehr die strenge, sondern die "liberale" Syntax der Aussagenlogik: Klammern können weggelassen werden, wenn sie unnötig sind, und wir erlauben auch andere Junktoren, z.B. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ oder $\oplus$ (also XOR: das eXklusive OdeR).

Entscheiden Sie mit Wahrheitstabellen, welche der folgenden Formeln (die alle syntaktisch korrekt sind) Tautologien und welche unerfüllbar sind.

a) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \leftrightarrow B))$

b) $A \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \oplus B))$

c) $(A \oplus B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$

d) $((A \oplus B) \oplus \neg A) \leftrightarrow B$

e) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow A) \rightarrow \neg(B \oplus C)$

3.2 Höchstens zwei aus vier

Geben Sie eine Formel, die genau die Aussagenvariablen A, B, C und D enthält, und die *genau dann* **wahr** ist, wenn *höchstens zwei* der vier Atomaussagen den Wert **wahr** annehmen.

3.3 Normalformen

Geben Sie zu jeder der folgenden Formeln je eine semantisch äquivalente Formel in KNF sowie in DNF.

a) $A \rightarrow A \vee B$

b) $(\neg A \rightarrow B \wedge C) \leftrightarrow \neg C$

c) $A \oplus B \oplus C$

3.4 Wahrheitstabellen und semantische Äquivalenz

Erstellen Sie vollständige Wahrheitstabellen für die beiden Formeln F und G:

$$\begin{aligned} F &:= (C \rightarrow A \vee B) \wedge C \wedge \neg A \rightarrow B \\ G &:= (C \rightarrow A \vee B) \wedge C \rightarrow B \end{aligned}$$

Beschreiben Sie für beide Formeln die Menge aller Modelle. Sind sie semantisch äquivalent? Ist eine der Formeln eine Tautologie?

3.5 Folgerungen

Zeigen Sie, dass dies korrekte semantische Folgerungen sind.

a) $\neg(F \oplus G)\,,\ F \vee G \models F \wedge G$

b) $F_1 \to F_2\,,\ F_2 \to F_3\,,\ F_3 \to F_1 \models (F_1 \leftrightarrow F_2) \wedge (F_2 \leftrightarrow F_3)$

c) $(L \vee F) \wedge (\neg L \vee G) \models F \vee G$

3.6 Das Schaf und die vierzig Löwen

Ein Schaf ist von vierzig hungrigen Löwen umzingelt. In dieser Aufgabe befassen wir uns mit der Frage, ob es etwas zu befürchten hat.

Es gelten folgende Regeln:

- Das Schaf wird nicht aufgeteilt: Wenn es gefressen wird, dann von *genau einem* Löwen.
- ... welcher dann allerdings sehr müde wird, in einen tiefen Verdauungsschlaf fällt und von einem Kollegen gefressen werden kann. Vereinfachend gesagt: Er wird selbst zum Schaf.
- Wenn ein Löwe befürchten muss, nach dem Fressen gefressen zu werden, dann frisst er nicht. Wenn er nichts zu befürchten hat, dann frisst er.
- Die Löwen sind nicht nur hungrig, sondern auch intelligent und rational, und sie sind sich bewusst und vertrauen darauf, dass es die anderen auch sind. (Für das Schaf ist diese Annahme unnötig.)

a) Für $n \geq 0$ sei B_n die Aussage: "Wenn ein Schaf von n Löwen umzingelt ist, dann wird es von einem von ihnen gefressen."
Bestimmen Sie die Wahrheitwerte von B_0, B_1, B_2 und B_3.

b) Für $n \geq 1$, stellen Sie den Wahrheitswert von B_n *rekursiv*, also als Funktion von $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$, dar.

c) Bestimmen Sie daraus B_{40} und, allgemein, eine nicht-rekursive Formel für B_n (d.h. B_n als Funktion von n).