ETH Zürich, D-INFK Prof. Stefan Wolf
HS 10, 27.9.10

Diskrete Mathematik

Übung 2

2.1 Induktion

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

Falls n Geraden in der Ebene die Eigenschaft haben, dass erstens keine zwei von ihnen parallel sind, und dass zweitens sich keine drei von ihnen in einem Punkt treffen, dann teilen diese Geraden die Ebene in genau

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ Teile.}$$

2.2 Rekursion: Klammerungen

In dieser Aufgabe betrachten wir Zeichenketten $a = a_1 a_2 \cdots a_l$. Jedes Symbol a_i der Zeichenkette ist entweder eine öffnende Klammer "(" oder eine schliessende ")", es gibt keine anderen Zeichen. Die Länge der Kette ist l.

Genau wie wir in der Vorlesung die Formeln der Aussagenlogik definiert haben, also *rekursiv*, sagen wir hier, was wir unter einer korrekten Klammerung verstehen:

Eine *korrekte Klammerung* K ist

- die leere Zeichenkette $K = \epsilon$, oder
- das Aneinanderhängen von 2 gültigen Klammerungen $K = K_1 K_2$, oder
- $K = (\ K'\ )$, wobei K' eine gültige Klammerung ist.

Zeichnen Sie sich das Syntaxdiagramm für die Sprache $\mathcal{K}$.

Sei $a = a_1 \cdots a_l$ eine beliebige Zeichenkette aus öffnenden und schliessenden Klammern. Sei $f(i)$, $i = 0, \ldots, l$, die Funktion, welche zählt, wie viele Klammern bis zur Position i mehr geöffnet wurden als geschlossen. Formaler:

$$f(0) := 0$$

und für $i \geq 1$

$$f(i) := f(i-1) + 1\,, \text{falls } a_i = (\ ,$$

sowie

$$f(i) := f(i-1) - 1\,, \text{falls } a_i =)\ .$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Falls $f(l) = 0$ sowie $f(i) \geq 0$ für alle i gilt, dann ist a eine korrekte Klammerung.

2.3 Aussagenlogik

In dieser Aufgabe wird der Begriff der *aussagenlogisch korrekten Formel* streng interpretiert, gemäss Syntaxdiagramm aus der Vorlesung: Keine Klammern dürfen weggelassen werden, und die einzigen Junktoren sind $\wedge$, $\vee$ und $\neg$.

Entscheiden Sie für die folgenden Zeichenketten, ob sie korrekte aussagenlogische Formeln sind. Zeichnen Sie für die korrekten Formeln den Syntaxbaum und werten Sie sie aus für die Belegung $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \texttt{wahr}$.

- $(((A \wedge B) \vee C) \wedge ((A \wedge B) \vee (\neg C)))$
- $((A \wedge A \wedge B))$
- $((A \vee (B \vee C)) \wedge ((A \vee B) \vee (\neg C)))$
- $(\neg\neg\neg A)$
- $(\neg(\neg A)) = A$

2.4 NAND

Sie haben in Ihrem Elektronikbaukasten nur noch NAND-Gatter übrig, so viele wie Sie brauchen. Bauen Sie damit ein AND, ein NOT und ein OR.

2.5 Wohin des Weges?

Auf einer Insel gibt es zwei Gruppen von Leuten: Die einen lügen immer, die anderen sagen immer die Wahrheit. Sie treffen auf eine Weggabelung, und dort steht einer der Bewohner, aber Sie wissen natürlich nicht, zu welcher Gruppe er gehört. Sie möchten nun herausfinden, ob es links oder rechts zum Vulkan geht. Sie dürfen ihm allerdings nur genau eine ja/nein-Frage stellen.

Geht das überhaupt?