

# Diskrete Mathematik

## Übung 11

### 11.1 Planarität von Würfeln

In dieser Aufgabe geht es darum, herauszufinden, wievieldimensionale Würfel planar sind.

- a) Zeigen Sie, dass der dreidimensionale Würfel  $Q_3$  planar ist, indem Sie ihn ohne Kantenüberkreuzungen in der Ebene zeichnen.
- b) Zeigen Sie: Ein Graph ist nicht planar, wenn er durch die folgenden Vereinfachungs-Operationen, möglicherweise mehrfach angewendet, entweder in  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  transformiert werden kann:
  - i. Eine Kante streichen,
  - ii. Zwei verbundene Knoten  $v$  und  $w$  "vereinigen": Die Kante  $\{v, w\}$  streichen, die beiden Knoten identifizieren, und den neuen Knoten  $v^*$  mit allen Knoten verbinden, die mit  $v$  oder  $w$  (oder beiden) verbunden waren.

Argumentieren Sie, dass die Operationen i. und ii. Planarität nicht zerstören können.

- c) Zeigen Sie, dass der vierdimensionale Würfel  $Q_4$  nicht planar ist.  
Schliessen Sie: Würfel sind genau bis Dimension 3 planar, ab 4 nicht mehr.

### 11.2 Platonische Körper

Bei einem *platonischen Körper* sind alle Flächen das gleiche reguläre  $n$ -Eck, und in jeder Ecke treffen sich gleich viele von diesen.

Bewegte Bilder aller dieser Körper finden Sie hier:

[http://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer\\_Körper](http://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper)

- a) Zeichnen Sie die fünf platonischen Körper als planare Graphen in der Ebene.
- b) Welche dieser Graphen sind hamiltonsch? Welche eulersch? Begründen Sie.
- c) Geben Sie Knotenfärbungen mit minimaler Anzahl Farben. Begründen Sie die Minimalität der Färbungen.

### 11.3 Sind alle Würfel bipartit?

Ist  $Q_d$  zweifärbbar für alle  $d \geq 1$ ?

#### **11.4 Zwei Zündschnüre, ein Feuerzeug und das Ei**

Sie haben zwei Zündschnüre, von denen Sie wissen, dass jede genau vier Minuten lang brennt. Allerdings nicht gleichmässig, d.h. die Hälfte einer Schnur dauert nicht unbedingt zwei Minuten. Sie möchten nun ein drei-Minuten-Ei kochen und die Zeit mit den Zündschnüren abmessen, weil Sie keine Uhr, dafür aber ein Feuerzeug zur Hand haben.

Wie können Sie das tun, ohne das Ei zu verkochen?